ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

CONCOURS COMMUN D'ADMISSION AUX ECOLES SUPERIEURES

SESSION 1988

DEUXIEME INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE

NOTA : Les cinq sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque, sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.
Dans la rédaction de leurs copies, les candidats sont priés de bien vouloir encadrer *chacun des résultats correspondants aux éléments* encadrés *dans les énoncés, et ceux-ci seulement.*

SUJET N° 1

Un carré a pour sommets A_1 , A_2 , A_3 et A_4 , de coordonnées respectives (1,1), (−1,1), (−1,−1) et (1,−1). On appelle (Γ) la courbe fermée constituée par les 4 demi-cercles (Γ_1), (Γ_2), (Γ_3) et (Γ_4), de diamètres respectifs $(A_4 A_1)$, $(A_1 A_2)$, $(A_2 A_3)$ et $(A_3 A_4)$, extérieurs au carré précédemment défini.

Soit $\rho = f(\theta)$ l'équation en coordonnées polaires de (Γ) dans le repère précédent. On constate que f est une fonction dont 2π est une période, et l'on admettra que f est somme de sa série de Fourier :

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) .$$

(1) Montrer que les coefficients b_n sont tous nuls.

(2) Montrer que, pour tout entier m , on a : $a_{4m+1} = a_{4m+2} = a_{4m+3} = 0$.

(3) Calculer a_{4m} .

(4) Calculer la somme S de la série de terme général $u_m = \frac{1}{16m^2 - 1}$ pour $m \geqslant 1$.

(5) La dérivée f' de f, là où elle existe, vaut-elle

$$f'(\theta) = -\sum_{m=1}^{\infty} 4m \cdot a_{4m} \cdot \sin(4m\theta) \quad ?$$

SUJET N° 2

Soit f la fonction de la variable réelle x définie par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x \ln x}$

quand cette expression a un sens. On rappelle que $\ln x$ désigne le logarithme népérien de x .

(1) Déterminer $\boxed{\ell} = \lim_{x \to 1} f(x)$. On posera, désormais, $f(1) = \ell$

(2) Dresser, pour $x \in]0, +\infty[$, un tableau de variation de f .

(3) Vérifier que $f(x) = (1+x) \int_0^1 x^{-t} dt$.

Montrer que, pour $|x-1| < 1$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$

les coefficients a_n étant donnés par une formule du type

$$a_n = \int_0^1 P_n(t)\,dt \quad , \quad \text{où les } \boxed{P_n} \text{ sont des polynômes que l'on précisera.}$$

(4) Pour $0 \leq n \leq 5$, calculer les coefficients a_n sous forme de fractions irréductibles.

(5) Quel est le rayon $\boxed{R}$ du développement en série entière de f au point $x = 1$?

SUJET N° 3

Pour tout entier $n \geq 0$, on introduit l'intégrale

$$I_n = \int_0^n e^{-x} \cdot \frac{x^n}{n!}\,dx \ .$$

(1) Calculer $\boxed{I_1}$.

(2) On pose

$$S_n = 1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \ \ldots \ + \frac{n^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \ ,$$

Montrer que $I_n = 1 - a_n \cdot S_n$, où $\boxed{(a_n)}$ est une certaine suite que l'on déterminera.

(3) On effectue, dans l'intégrale définissant I_n , le changement de variable $x = n(1-t)$.

Montrer que I_n prend alors la forme

$$I_n = \frac{n^{n+1}}{e^n \cdot n!} \int_0^1 (\varphi(t))^n\,dt \ ,$$

où $\boxed{\varphi}$ est une fonction très simple que l'on étudiera sur $[0,1]$.

(4) On pose $K_n = \int_0^1 (\varphi(t))^n\,dt$. En admettant la formule connue $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrer l'équivalent asymptotique

$$K_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad , \quad n \to +\infty$$

On pourra, pour cela, «couper en deux» l'intégrale définissant K_n , $K_n = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1$, où ε est choisi judicieusement dans $]0,1[$.

(5) Le résultat de la question précédente étant au besoin admis, ainsi que la formule de Stirling $n! \sim (n/e)^n \sqrt{2\pi n}$, $n \to \infty$, déterminer le réel $\boxed{\lambda}$ tel que

$$S_n \sim \lambda e^n \ , \ n \to \infty \ .$$

Tournez la page S. V. P.

SUJET N° 4

Soit (E) la courbe du plan, qui est l'image de l'ensemble des nombres complexes z satisfaisant à l'égalité $|1+z| = |1+z^2|$, avec $z=x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On définit aussi f(x,y) comme étant le plus grand des deux réels positifs $|1+z|^2$ et $|1+z^2|^2$ c'est-à-dire

$$f(x,y) = \max \left\{ |1+z|^2 , |1+z^2|^2 \right\} , \quad z = x + iy .$$

(1) Montrer que les coordonnées (x,y) d'un point M de (E) vérifient la relation suivante :

$$(x^2+y^2)^2 - 3(x^2+y^2) + \phi(x) = 0 ,$$

où ϕ est une fonction de x que l'on déterminera.

(2) Calculer le maximum de $|z|$ sur (E).

(3) La courbe (E) possède 6 points à tangentes verticales, dont on demande les coordonnées.

(4) On se propose de calculer la borne inférieure de la fonction de deux variables f(x,y) sur $\mathbb{R}^2$ tout entier. On appelle (D_1) la partie du plan telle que $|1+z| < |1+z^2|$, et (D_2) l'autre partie telle que $|1+z| > |1+z^2|$. Montrer que la fonction f n'a pas de minimum dans (D_1) ni dans (D_2).

(5) Montrer que f a pour minimum la valeur $3-\sqrt{5}$, et calculer les coordonnées du ou des points de (E) où il est atteint.

SUJET N° 5

Soit $\vec{V}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$, de coordonnées (x,y). On associe, à tout réel θ, l'expression $f(\theta) = f_{x,y}(\theta) = |x.\cos\theta + y.\sin 2\theta|$.

(1) Montrer que la fonction $\theta \to f_{x,y}(\theta)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, et que l'expression

$$\|\vec{V}\| = \sup_{\theta \in \mathbb{R}} f_{x,y}(\theta)$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Soit (D_θ) la famille de droites d'équation : $x.\cos\theta + y.\sin 2\theta = 1$. Montrer qu'elle admet une enveloppe (C). On exprimera les coordonnées du point de contact de (D_θ) avec (C) en fonction de θ.

(3) Dessiner cette courbe (C) en précisant les tangentes aux points situés sur les axes.

(4) Représenter, pour la norme introduite dans la question (1), la partie de la boule unité située dans le premier quadrant : $x \geq 0$, $y \geq 0$.

(5) En déduire la boule unité toute entière, que l'on représentera.

»»»»»»»»»»oOo«««««««««««

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail